

# Les fusées à eau

Ayoub Bensaïd, Fabrice Bernhard,  
Florent Cadoux, Samuel Deleglise,  
Clement Rechatin, Pascal Retornaz,  
Jean-Michel Travert

18 décembre 2004



## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction aux fusées à eau</b>	<b>3</b>
1.1	Principe . . . . .	3
1.2	Matériel . . . . .	3
1.2.1	La fusée . . . . .	3
1.2.2	La base de lancement . . . . .	4
1.3	Ordres de grandeurs . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Objectifs du projet</b>	<b>6</b>
2.1	Objectifs scientifiques . . . . .	6
2.1.1	Valorisation du projet . . . . .	6
<b>3</b>	<b>Le modèle standard des fusées à eau</b>	<b>7</b>
3.1	Hypothèses . . . . .	7
3.2	Notations et conventions . . . . .	8
3.3	Poussée sur le launchtube . . . . .	8
3.4	Ejection de l'eau . . . . .	10
3.5	Ejection de l'air . . . . .	15
3.5.1	Ecoulement sonique . . . . .	15
3.5.2	Ecoulement subsonique . . . . .	16
3.6	Vol libre jusqu'à l'apogée . . . . .	18
3.7	Programme informatique . . . . .	18
<b>4</b>	<b>Expérimentations</b>	<b>20</b>
4.1	Poussée du launchtube . . . . .	20
4.2	Poussée de l'eau . . . . .	23
4.2.1	Description de l'expérience . . . . .	23
4.2.2	Résultats . . . . .	24
4.3	Frottement fluide de l'air . . . . .	27
4.3.1	Dispositif expérimental . . . . .	27
4.3.2	Problèmes expérimentaux . . . . .	27
4.3.3	Transposition du problème . . . . .	28
4.3.4	Expérience . . . . .	29
4.3.5	Analyse des Résultats . . . . .	30
4.3.6	Résultats expérimentaux . . . . .	32
4.4	Mesure d'altitude à volume d'eau constant et pression variable . . . . .	35
4.4.1	Méthode 1 : A l'aide d'une caméra . . . . .	35
4.4.2	Méthode 2 : utilisation d'un fil de pêche . . . . .	36
<b>5</b>	<b>Validation du modèle</b>	<b>38</b>
5.1	Poussée sur le launchtube . . . . .	38
5.2	Poussée de l'eau . . . . .	39
5.3	Poussée de l'air . . . . .	41
5.4	Vol libre jusqu'à l'apogée . . . . .	41
5.5	Vol global . . . . .	41

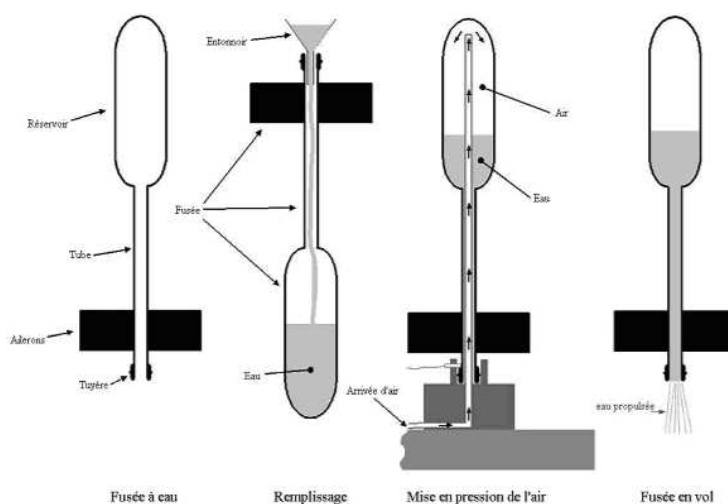
5.6	Conclusion . . . . .	42
<b>6</b>	<b>Approfondissements</b>	<b>42</b>
6.1	Recherche du volume d'eau optimal . . . . .	42
6.2	Forme de la tuyère . . . . .	43
6.3	Stabilité . . . . .	44
6.4	Efforts sur la bouteille . . . . .	44
6.5	Et pour améliorer (encore) l'efficacité... . . . . .	45

Les fusées à eau constituent un exemple d'objet ludique et facile à réaliser, susceptible d'éveiller les enfants à des principes physiques simples tels que le poids des corps ou l'action et la réaction. Mais leur étude mécanique peut être poussée plus loin, et les fusées à eau se révèlent alors un objet d'étude riche et passionnant, qui permet d'appliquer concrètement les connaissances acquises en mécanique des fluides.

## 1 Introduction aux fusées à eau

### 1.1 Principe

Comme toutes les fusées, la fusée à eau est basée sur le principe d'action réaction. Dans ce cas particulier, c'est l'eau propulsée par l'air sous pression qui sert à faire décoller la fusée. Dans un réservoir constitué le plus souvent d'une simple bouteille en plastique, on verse de l'eau et on injecte de l'air à l'aide d'une pompe (typiquement, une pompe à vélo). L'air éjecte l'eau hors de la bouteille et vers le bas, ce qui propulse la fusée vers le haut.



### 1.2 Matériel

#### 1.2.1 La fusée

Le réservoir est constitué d'une bouteille en PET (bouteille de boisson gazeuse), on peut réaliser une ogive "elliptique" en thermoformant le culot de la bouteille préalablement pressurisée à l'aide d'un décapeur thermique ou d'un puissant sèche-cheveux. La fusée est également dotée d'ailerons lui permettant de se stabiliser en vol. Ces derniers sont réalisés en plastique de récupération et fixés à la fusée par collage. Enfin une tête placée à l'avant, parfois simplement

la partie supérieure d'une bouteille en plastique coupée en deux, assure un certain aérodynamisme et permet de fixer une masse additionnelle et de stocker si besoin un parachute.

### 1.2.2 La base de lancement

La principale difficulté technique consiste à relâcher la bouteille sous pression de façon instantanée, et symétriquement afin que la bouteille parte bien vers le haut. Ce dernier point est même capital car les fusées à eau se révèle rapidement des objets dangereux et à moins de disposer d'un espace libre très étendu, il faut absolument maîtriser le mieux possible le décollage pour prévoir le point d'impact. La solution adoptée doit permettre l'étanchéité de la liaison fusée - système de gonflage pendant la phase de pressurisation, et d'effectuer le lancer à pression connue : ainsi, le simple bouchon de liège utilisé couramment par les enfants ne permet pas de choisir le moment (et donc la pression) ou la fusée va partir. Nous avons choisi d'utiliser le système inventé par Ian Clark à base de serre-câbles : un tube d'une vingtaine de centimètres (launch-tube) est maintenu à l'intérieur de la bouteille, l'étanchéité se fait à l'aide d'un joint torique comprimé entre le tube et l'intérieur du goulot de la bouteille. La bouteille est maintenue emboîtée sur le launch-tube grâce à un jeu de serre-câbles appuyés sur sa collerette. Pour déclencher le tir, il suffit de libérer les serre-câbles en abaissant le collier de déclenchement.

Le launch-tube présente un triple intérêt :

- il permet de guider la fusée pendant la phase d'accélération initiale.
- à volume égal de matière éjectée (et donc perte de pression égale), il produit une poussée plus importante que de l'eau : la totalité de l'énergie cinétique va à la fusée, le launch tube et la terre, de masse quasi infini restant immobiles.
- tant que la fusée n'est pas sortie du launch-tube, le réservoir d'air a un volume supérieur à celui de la bouteille (il faut ajouter le volume de la tuyauterie).

Certains éléments apparaissent sur la photo suivante. On distingue le launch-tube à travers la bouteille, et le collier de déclenchement en PVC gris qui dissimule les serre-câbles.



### 1.3 Ordres de grandeurs

L'expérience et différentes mesures effectuées par nous ou publiées sur Internet nous permettaient avant de commencer l'étude, d'avoir une idée des ordres de grandeurs des phénomènes que nous allions observer.

- La pression d'explosion des bouteilles en PET est de l'ordre de 10 bars. En pratique la pression n'est pas un paramètre ajustable, on prend systématiquement la pression la plus élevée permise par la pompe à vélo.

- Les hauteurs atteintes par nos engins sont d'une cinquantaine de mètres en moyenne. Les meilleures fusées atteignent actuellement plus de quatre cents mètres mais font appel à une technologie plus évoluée.

- L'accélération maximale est de l'ordre de la centaine de G (pendant une durée très courte, la phase de poussée dure moins d'un dixième de seconde avec une tuyère standard). La vitesse maximale atteinte est de l'ordre de quelques dizaines de mètres par seconde.

## 2 Objectifs du projet

### 2.1 Objectifs scientifiques

On trouve de nombreux sites sur Internet qui traitent des fusées à eau, certains proposant même des simulations numériques en fonction des paramètres entrés par l'utilisateur. Néanmoins, il existe peu de documentation scientifique sérieuse à ce propos. En particulier, il existe un modèle assez répandu, qu'on appellera dans la suite le "modèle standard" des fusées à eau, que beaucoup de sites utilisent mais que personne à notre connaissance ne s'est attaché à valider.

Notre démarche consiste donc à étudier ce modèle, en déduire par simulation numérique un comportement théorique de la fusée dans les différentes phases de la montée, puis à comparer ces données avec les résultats de manipulations expérimentales. On cherche à valider ou invalider le modèle étudié.

#### 2.1.1 Valorisation du projet

Ce projet est le fruit d'un long travail mais surtout d'une passion commune de l'équipe. Il est donc logique de communiquer à la fois nos résultats et cette passion à travers la diffusion de ce rapport.

Nous remercions Ivan Lanoë, qui a accepté de mettre ce rapport en ligne sur son site [www.techno-challenge.org](http://www.techno-challenge.org).

C'est aussi l'organisateur du championnat de France de fusées à eau, auquel nous avons eu le privilège de participer, le week-end des 15 et 16 mai 2004. Malgré quelques casses matérielles, notre équipe s'en est très bien tiré, effectuant même une performance dans la catégorie "meilleur temps de vol", malheureusement pas homologuée. On voit ici notre fusée redescendre sous son parachute (modèle en polyester cousu et collé, déclenché par un mécanisme à retardement connu sous le nom de tomy timer).



Nous espérons que nos résultats et ce rapport serviront ou du moins intéresseront toute la communauté française des lanceurs de fusée à eau.

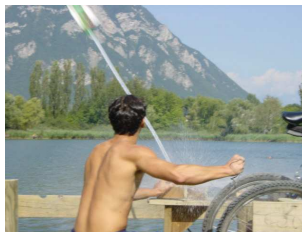


### 3 Le modèle standard des fusées à eau

Venons-en maintenant à l'aspect le plus technique du projet : la modélisation. Le modèle présenté ici est une version de notre crû, inspirée des travaux de Dean Wheeler (<http://www.et.byu.edu/wheeler/benchtop/>) et de M. Prusa ([epubs.siam.org/sam-bin/dbq/article/34822](http://epubs.siam.org/sam-bin/dbq/article/34822)). Même si le second est une publication scientifique, ces deux documents présentent des passages assez "louches" (hypothèses difficiles à justifier par exemple) et nous avons donc fini, avec l'aide d'ouvrages généralistes de mécanique des fluides et d'aérodynamique, par produire un modèle en grande partie original.

#### 3.1 Hypothèses

On considère un mouvement vertical à une dimension selon l'axe  $Oz$ , et que l'écoulement du fluide ejecté sera aussi dirigé selon cet axe. En pratique, il est facile de réaliser des tirs verticaux pourvu que la base de lancement soit bien horizontale, et on observe alors sur des photographies que l'écoulement est effectivement très directif :



En revanche l'hypothèse de réduction à une dimension est tout à fait contestable, mais elle est absolument nécessaire pour pouvoir mener les calculs. On pourra se consoler en constatant sur les photographies de l'expérience filmée avec une caméra rapide du LadHyx que l'interface entre l'air et l'eau reste horizontale "assez longtemps" et que cette hypothèse ne devient réellement fantaisiste que lorsque l'interface passe dans la région du convergent (au niveau du goulot de

la bouteille).

En ce qui concerne les lois physiques, on considérera l'air comme un gaz parfait subissant une détente adiabatique réversible. En effet, la brièveté de la phase de montée interdit les échanges thermiques avec l'extérieur de la bouteille (transformation adiabatique). La réversibilité est plus discutable.

Les frottements visqueux de l'air suivent une loi proportionnelle au carré de la vitesse,  $v^2$ . Le  $C_x$  correspondant a été estimé par une série d'expériences dont la précision n'est peut-être pas excellente. Il vaudrait environ 0.4 (voir plus loin l'expérience "frottement fluide de l'air").

Le volume de la bouteille est considéré comme constant, même si des expériences ont prouvé qu'elle se dilate d'environ 3% à six bars, et que par conséquent une certaine quantité d'énergie mécanique élastique doit être stockée dans le corps de la fusée et restituée au moment de la détente. Nous supposons ces phénomènes négligeables.

La montée sera décomposée en quatre phases. D'abord, sur les trente premiers centimètres, la fusée coulisse sur le launchtube. Pendant cette phase, on néglige les frottements de l'air et du launchtube (hypothèse qui sera justifiée a posteriori) et on considère qu'il n'y a pas de pertes d'eau.

Ensuite l'eau est éjectée (phase 2), c'est la phase qui donne le plus de vitesse à la fusée. L'air est à son tour éjecté (phase 3). Enfin la fusée monte librement jusqu'à son apogée.

### 3.2 Notations et conventions

Effectuons un premier calcul. La fusée est supposée avoir au départ 10 cm d'eau (soit 0,40L) pour un poids total de 0.55 Kg, le launchtube mesure 30 cm. On gonfle dans un premier temps la bouteille à 4 bars. Ces valeurs permettront d'illustrer le calcul théorique qui va suivre par des courbes calculées numériquement à l'aide du logiciel Maple.

### 3.3 Poussée sur le launchtube

En négligeant les pertes d'eau la bouteille garde une masse constante durant cette phase. On note  $F_{frot} = -1/2C\rho v|v|$  la force de frottement exercée sur la fusée.

La force de poussée exercée sur la fusée est de la forme :

$$F_{pous} = (P_{OT} - P_{atm})A_{OT}$$

où  $P_{OT}$  est la pression à l'ouverture du launchtube.

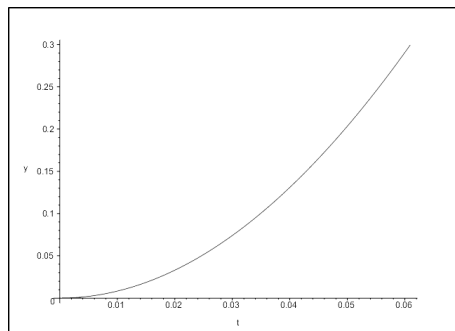
On a alors

$$a = \frac{F_{frot} + F_{pous}}{m_{t=0}} - g$$

Le court temps d'éjection (la simulation donne un temps d'effacement du launchtube de 48 millisecondes) permet alors de négliger dans une première approximation le terme de frottement. L'équation du mouvement s'intègre alors en :

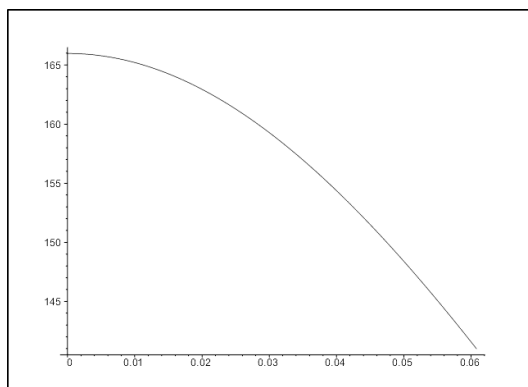
$$v = \sqrt{\frac{V_{t=0}P_{t=0}}{(1-\gamma)m} \left( \frac{1}{1 + \frac{A_{OT}z}{V_{t=0}}} - 1 \right) - \left( g + \frac{P_{atm}A_{OT}}{m} \right) z}$$

On vérifie à posteriori que le terme de frottement à la fin du launchtube est négligeable par rapport à l'effet de poussée. A l'aide de Maple on calcule en effet que la bouteille quitte le launchtube avec une vitesse de  $10ms^{-1}$  soit un terme de frottement de l'ordre de  $0.4ms^{-2}$  qui est totalement négligeable devant le terme d'accélération global de l'ordre de  $150ms^{-2}$ .



Simulation pour notre fusée mise en pression à 4 bars (launchtube de 30cm).

L'accélération décroît logiquement avec la pression de la chambre mais compte tenu du petit volume occupé par le launchtube, elle reste à peu près constante (entre  $165ms^{-2}$  et  $140ms^{-2}$ ).



### 3.4 Ejection de l'eau

On utilise les équations de la mécanique des fluides dans le référentiel accéléré de la fusée. Soit  $u$  la vitesse de l'eau dans ce référentiel.

On a de manière évidente par la conservation de la masse de l'eau, fluide incompressible :

$$\rho \operatorname{div}(u) = 0$$

soit

$$\rho u(z)A(z) = cte$$

On établit l'équation générale du mouvement en utilisant les équations de Navier-Stokes, à savoir à partir de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt}(m_b \vec{v} + \int \rho(\vec{u} + \vec{v})dV) = \vec{F}_{frot} + m_{tot} \vec{g} + (P_{ext} - P_{atm})A_{ext} + \frac{dm}{dt}(\vec{u}_{ext} + \vec{v})$$

La partie gauche de l'équation représente la variation temporelle de quantité de mouvement et la partie droite explicite les contributions des forces de pression, frottement et de la perte de quantité de mouvement de la fusée par le goulot de la bouteille.

Et comme en dérivant sous l'intégrale on a :

$$\frac{d}{dt} \left( m_b \vec{v} + \int \rho(\vec{u} + \vec{v}) dV \right) = m_{tot} \vec{a} + \frac{dm}{dt} \vec{v} + \frac{d}{dt} \left( \int \rho \vec{u} dV \right)$$

On obtient finalement

$$m_{tot} \vec{a} = \underbrace{(P_{ext} - P_{atm})A_{ext} + \frac{dm}{dt} \vec{u}_{ext}}_{\text{force de poussée}} + F_{frot} - \frac{d}{dt} \left( \int \rho \vec{u} dV \right) + m_{tot} \vec{g}$$

On voit apparaître un terme classique de force de poussée qui n'est pas propre aux fusées à eau mais à toutes les fusées. Le terme  $\frac{d}{dt} (\int \rho \vec{u} dV)$  représente la variation de la quantité de mouvement interne.

Or

$$\frac{d}{dt} (m) = \rho u_{ext} A_{ext}$$

d'après l'équation de conservation de la masse et

$$P_{ext} = P_{atm}$$

car l'eau est incompressible et est en équilibre avec la pression ambiante.

On obtient alors en appelant  $H$  la hauteur de l'interface air/eau :

$$\frac{d}{dt} \left( \int \rho \vec{u} dV \right) = \rho A_{ext} dt \left( \int_0^H \vec{u}_{ext} \right) dz = \rho A_{ext} \left( H \frac{d\vec{u}_{ext}}{dt} + \frac{A_{ext}}{A(H)} u_{ext} \vec{u}_{ext} \right)$$

et

$$F_{poussée} = \rho A_{ext} u_{ext} \vec{u}_{ext}$$

On se sert de l'équation de Bernoulli en régime instationnaire pour déterminer des inconnues. On suppose en effet que l'écoulement est irrotationnel (hypothèse à vérifier étant donné le profil de la bouteille...) et le fluide parfait :

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} dz + \Delta \left[ \frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + (a + g)z \right] = 0$$

On applique cette relation entre l'interface et la sortie de la bouteille. En supposant que la détente de l'air est adiabatique, comme la pression de l'eau à l'interface est celle de l'air :

$$P_H = P_{init} \left( \frac{V_{init}}{V_H} \right)^\gamma$$

...on obtient :

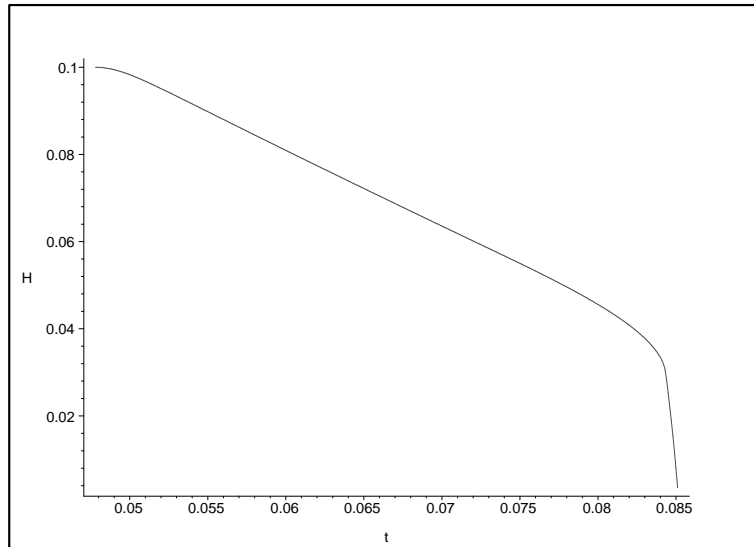
$$\int_0^H \frac{du}{dt} dz + 1/2 \left[ \left( \frac{A_{ext}}{A(H)} \right)^2 - 1 \right] u_{ext}^2 + \frac{P_{init} \left( \frac{V_{init}}{V_H} \right)^\gamma}{\rho} - \frac{P_{atm}}{\rho} + (a + g)H = 0$$

Et finalement, il nous reste à résoudre le système d'équations différentielles :

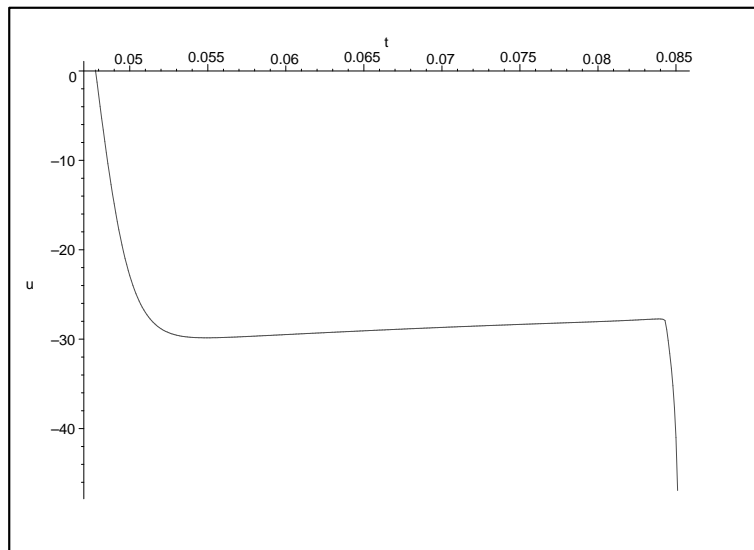
$$\begin{cases} \rho A_{ext} u_{ext}^2 - \frac{C_x \rho A_{bouteille}}{2} v^2 - \rho A_{ext} \left( H \frac{du_{ext}}{dt} + \frac{A_{ext}}{A(H)} u_{ext}^2 \right) - m_{tot} g & = m_{tot} a \\ \frac{du_{ext}}{dt} \int_0^H \frac{A(0)}{A(z)} dz + 1/2 \left[ \left( \frac{A_{ext}}{A(H)} \right)^2 - 1 \right] u_{ext}^2 + \frac{P_{init} \left( \frac{V_{init}}{V_H} \right)^\gamma}{\rho} - \frac{P_{atm}}{\rho} + (a + g)H & = 0 \\ \frac{dH}{dt} & = \frac{A_{ext} u_{ext}}{A(H)} \end{cases}$$

On peut désormais résoudre numériquement la phase d'éjection de l'eau. Tout d'abord le temps d'éjection de l'ordre de 0.04 seconde est acceptable et correspond bien à ce que nous avons pu mesurer par chronophotographie.

On regarde ensuite la position de l'interface air-eau, information qu'on pourra directement obtenir à partir d'un film de la phase d'éjection d'eau.

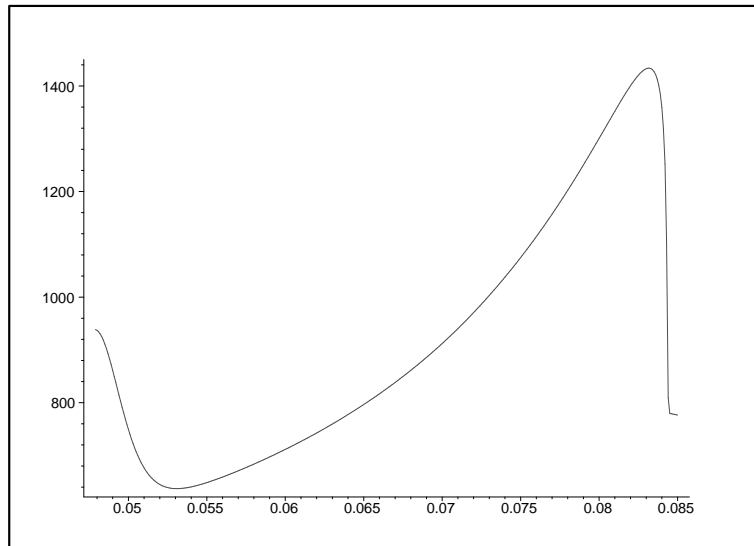


Ou de manière équivalente on peut étudier la vitesse d'éjection de l'eau directement liée à la vitesse de descente de l'interface dans la bouteille.



La vitesse obtenue est de l'ordre de  $-30\text{ms}^{-1}$  ce qu'on pourra comparer avec les résultats expérimentaux mais qui encore une fois semble être du bon ordre de grandeur.

On obtient conjointement la position, la vitesse et l'accélération de la fusée. On s'intéresse particulièrement à l'accélération sur laquelle on a des informations expérimentales grâce à la manipulation du marteau de force.

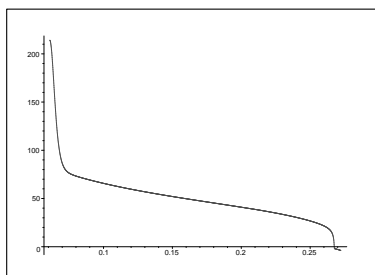


Commentons cette courbe :

Les frottements sont là encore négligeables on peut donc ne s'intéresser qu'aux autres termes des équations.

Dans un premier temps l'accélération élevée due exclusivement aux forces de pression chute avec la mise en mouvement de l'eau dans la bouteille.

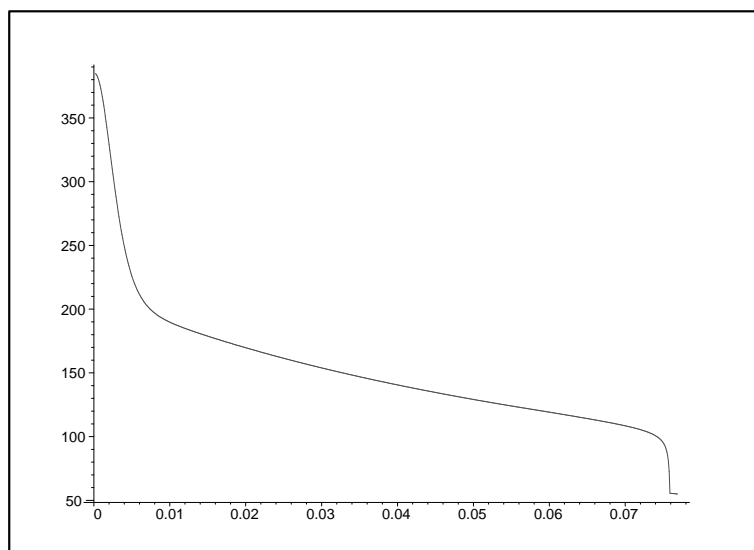
Nous arrivons ensuite dans une phase où la vitesse d'expulsion est quasi-constante. Le terme correspondant à la variation de quantité de mouvement interne ne fait plus varier l'accélération. Les variations d'accélération s'expliquent alors par "l'arbitrage" entre la perte de masse d'une part et la chute de la pression dans la bouteille d'autre part. Pour une bouteille suffisamment pressurisée on assistera à une augmentation de l'accélération ce qui ne sera pas le cas d'une bouteille pressurisée à 1 bar par exemple.



$P_{init} = 1 \text{ bar}$

La diminution brutale d'accélération sur la fin de la phase de la poussée par l'eau s'explique par divers phénomènes liés à la forme du goulot, mais de toute façon il ne serait pas étonnant que le modèle comporte quelques failles à ce niveau. Les observations montrent en effet que dans le goulot l'interface est loin d'être plate et on a donc parfois échappement d'air alors qu'il reste de l'eau dans la bouteille. Mais vu la brièveté de cette phase transitoire cela ne remet pas en cause le modèle global.

Il faut évidemment faire une version sans frottement ni force d'inertie due à l'accélération pour la comparer aux résultats expérimentaux. On obtient alors cette courbe qui représente la force de réaction du marteau, en considérant la bouteille comme totalement rigide.



On verra que cette courbe ne ressemble malheureusement pas tellement à celle obtenue expérimentalement, dont l'interprétation est délicate.

### 3.5 Ejection de l'air

Pour rendre les calculs plus faciles on considère deux zones dans la bouteille. Le réservoir dans lequel le fluide est quasiment au repos et subit une transformation adiabatique, et la zone du goulot où le fluide subit de fortes variations de densité.

On a de façon évidente :

$$\frac{d\rho_r}{dt} = \frac{1}{V_b} \frac{dm}{dt}$$

Avec :

$$\frac{dm}{dt} = -\rho_{ext} A_{ext} |u_{ext}|$$

On utilise comme pour la tuyère de Laval l'équation :

$$\frac{C_{ext}^2}{\gamma - 1} + \frac{u_{ext}^2}{2} = \frac{C_r^2}{\gamma - 1}$$

... dont on déduit :

$$\frac{C_r^2}{C_{ext}^2} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{u_{ext}^2}{C_{ext}^2} = \left( \frac{\rho_r}{\rho_{ext}} \right)^{\gamma - 1} = \left( \frac{P_r}{P_{ext}} \right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}}$$

Deux cas ont alors lieu : si  $\frac{2}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{\rho_r}{\rho_{ext}} \right)^{\gamma - 1} - 1 \right) > 1$  soit  $\frac{\rho_r}{\rho_{ext}} > 1.57$  (on prend  $\gamma = 1.4$ ) on amorce le goulot (la vitesse au niveau du goulot est celle du son locale), sinon on est dans un régime subsonique. Considérons ces deux cas.

### 3.5.1 Ecoulement sonique

La vitesse d'écoulement est égale à la vitesse du son locale, le goulot convergent ne permettant pas d'écoulement supersonique. Dans ce cas on déduit de l'équation ci-dessus en posant  $u_{ext} = C_{ext}$  :

$$\rho_{ext} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma - 1}} \rho_r$$

et :

$$u_{ext} = C_{ext} = \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} C_r = \left( \frac{\rho_r}{\rho_{rinit}} \right)^{\frac{\gamma - 1}{2}} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{2}} C_{rinit}$$

On peut alors résoudre l'équation d'évolution de la densité en intégrant l'équation :

$$\frac{d\rho_r}{dt} = -\frac{A_{ext}}{V_b} \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}} \frac{\rho_r^{\frac{\gamma + 1}{2}}}{\rho_{rinit}^{\frac{\gamma - 1}{2}}} C_{rinit}$$

La force de poussée intervenant alors dans l'équation du mouvement est :

$$F_{sonique} = (P_{ext} - P_{atm}) A_{ext} + \frac{dm}{dt} u_{ext} = ((1 + \gamma) P_{ext} - P_{atm}) A_{ext}$$

car on a

$$C_{ext} = \sqrt{\frac{\gamma P_{ext}}{\rho_{ext}}}$$

Et on obtient finalement

$$F_{sonique} = 2 \left( \frac{2}{\gamma + 1} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} P_r A_{ext} - P_{atm} A_{ext}$$

### 3.5.2 Ecoulement subsonique

Au niveau du goulot la pression et la densité du gaz expulsé sont celles de l'air ambiant, on a donc  $\rho_{ext} = \rho_{airambiant}$ . Il ne reste alors plus qu'à injecter l'expression de  $u_{ext}$  obtenue dans la première équation pour obtenir une équation différentielle permettant de connaître la densité de l'air dans la bouteille.

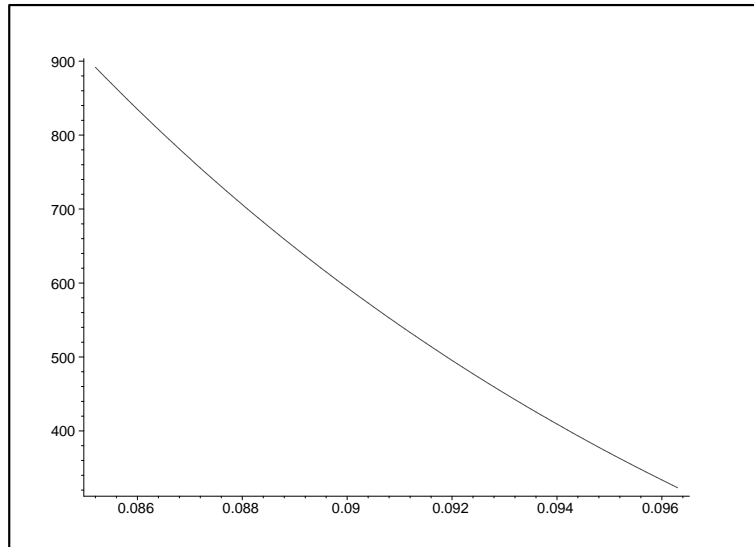
$$\frac{d\rho_r}{dt} = -\frac{1}{V_b} \rho_{air} C_{air} A_{ext} \left( \frac{2}{\gamma-1} \left( -1 + \left( \frac{\rho_r(t)}{\rho_{air}} \right)^{\gamma-1} \right) \right)^{\frac{1}{2}}$$

La force de poussée correspondante est :

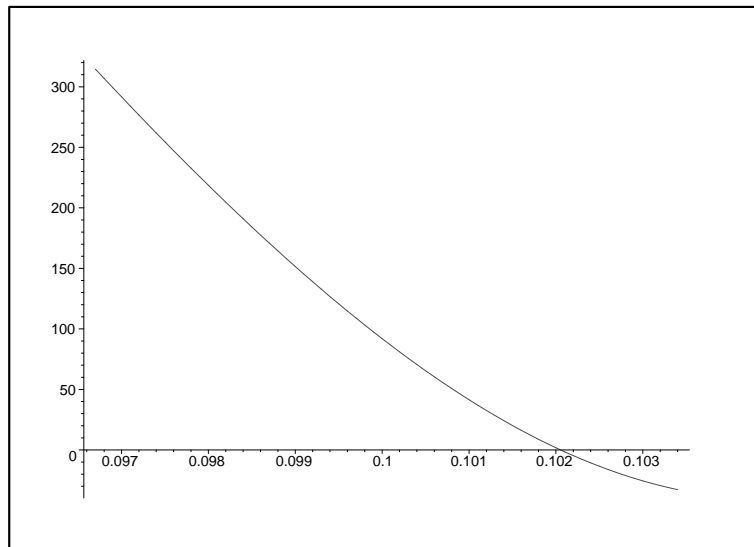
$$F_{subs} = \rho_{air} A_{ext} C_{air}^2 \left( \frac{2}{\gamma-1} \left( -1 + \left( \frac{\rho_r(t)}{\rho_{air}} \right)^{\gamma-1} \right) \right)$$

Dans les deux cas on rajoute dans l'équation du mouvement la force de frottement et la force de pesanteur. Les équations s'intègrent numériquement jusqu'à ce que la masse volumique du gaz dans la bouteille soit respectivement  $1.57 \rho_{air}$  pour les équations "soniques" et  $\rho_{air}$  pour les équations subsoniques.

On obtient pour les deux phases les courbes d'accélération suivantes. On appréciera au passage la continuité du modèle au passage sonique subsonique.



Poussée supersonique



Poussée subsonique

On remarque que de manière surprenante, la durée de cette phase de poussée de l'air (15 ms) est du même ordre de grandeur que celle de l'eau (30 ms), résultat qui sera confirmé par l'expérience réalisée au Ladhyx. Si la poussée est moins importante que pendant la phase précédente (force d'une trentaine de newtons) elle n'est pas pour autant négligeable permettant à la fusée de gagner ici  $7 m \cdot s^{-1}$

A la fin de cette phase d'éjection d'air, la bouteille ne subit plus aucune force de poussée, elle n'est plus soumise qu'à la pesanteur et aux forces de frottement.

### 3.6 Vol libre jusqu'à l'apogée

Cette phase ne comporte aucune difficulté théorique, il suffit d'intégrer numériquement l'équation :

$$m_{videa} = \frac{C_x \rho A_{bouteille}}{2} v^2 - m_{videg}$$

On obtient alors l'apogée du tir pour  $v = 0$ .

### 3.7 Programme informatique

Pour avoir une vision plus globale du vol de la fusée ce que ne permettait pas le logiciel de calcul utilisé nous avons écrit une applet java implémentant ces équations.

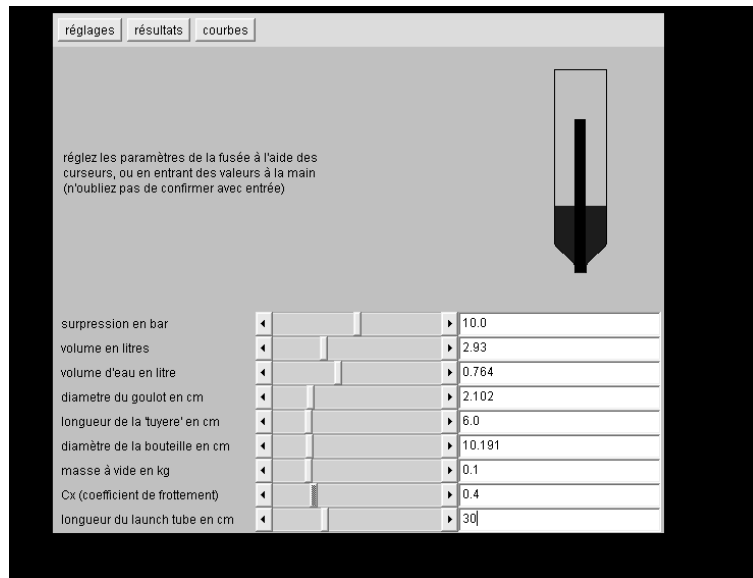
**Contenu du programme** Le programme calcule la position, la vitesse et l'accélération de la fusée en séparant le vol en 5 phases :

1. Poussée sur le launch tube : On intègre l'équation ()
2. Poussée de l'eau : On résoud le système d'équation ()
3. Poussée de l'air à la vitesse du son : On intègre l'équation ()
4. Poussée de l'air à vitesse subsonique : On intègre l'équation ()
5. Régime de vol ballistique : On intègre l'équation ()

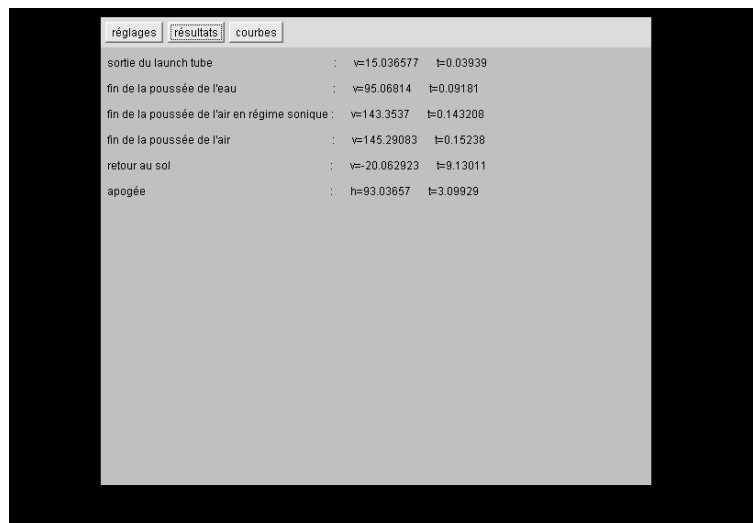
Pour chaque phase de vol, on utilise la méthode d'Euler pour résoudre les équation, le pas utilisé est, pour tout les régimes de vol de 0,5ms, qui semble être un bon compromis entre précision et temps de calcul. Pour passer d'un régime de vol au suivant, on utilise des conditions d'arrêt telles que  $z < l_{launchtube}$ ,  $h_{eau} > 0$ , ou encore  $\rho < \rho_{critique}$  pour le passage du régime sonique au régime subsonique. Le code complet du programme en java est fournit en annexe.

**Mode d'emploi** L'applet est disponible à l'URL <http://perso.numericable.fr/delesamu/fusee/Simul.htm>. La machine virtuelle java est nécessaire pour faire tourner le programme.

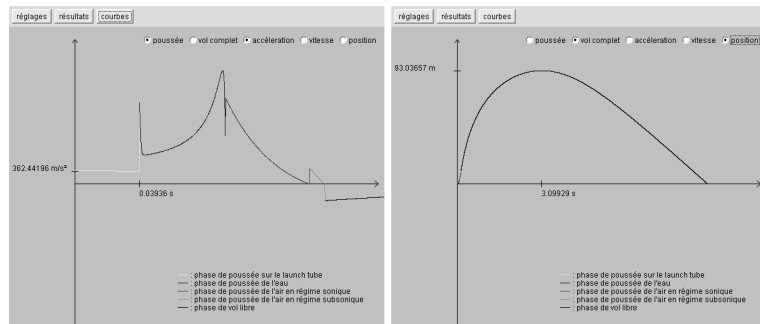
1. rentrée des paramètres L'écran suivant sert à régler les différents paramètres du vol.



2. Résultats Cliquez ensuite sur l'onglet résultats. Après un moment (plus ou moins long selon que les phase de poussée sont rapides ou non), vous obtenez un résumé des caractéristiques principales du vol :



3. Courbes L'onglet 'Courbes' vous permet de visualiser la vitesse, la position ou l'accélération de la fusée en fonction du temps. vous pouvez également choisir si l'échelle de temps est basée sur la phase de poussée ou si elle couvre tout le vol en cliquant sur la boîte à cocher 'poussée' ou 'vol complet' :

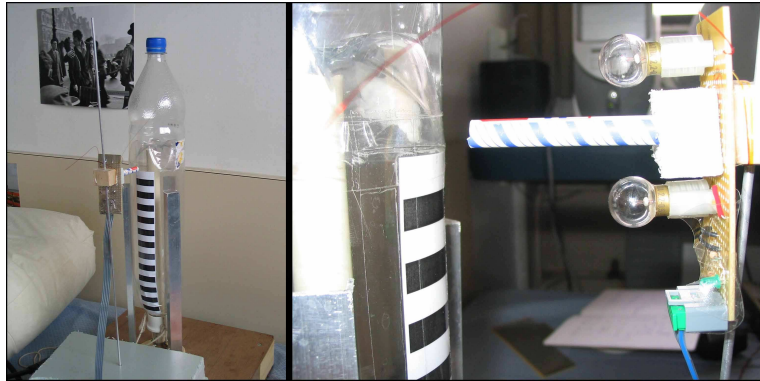


Le modèle permet, en mettant bout à bout ces cinq phases, de décrire toute la montée de la fusée à eau. Mais il a été construit au prix d'hypothèses assez simplificatrices. Nous avons donc réalisé une série d'expériences dans le but le confronter à la réalité.

## 4 Expérimentations

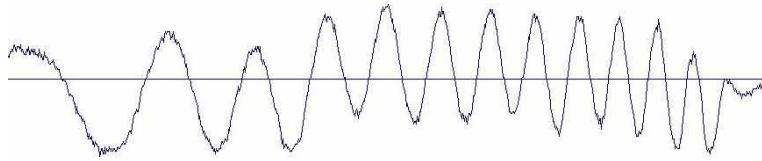
### 4.1 Poussée du launchtube

Dans le but de valider le modèle qui décrit la phase de poussée sur le launchtube, on veut observer la position et la vitesse de la fusée sur les trente premiers centimètres de vol. Pour cela, nous avons réalisé avec des composants électroniques de base un capteur optique qui délivre une tension variable selon l'éclairement, et nous avons représenté sur le corps de la fusée des bandes blanches et noires espacées d'un centimètre. La partie photosensible est une photodiode rapide, un composant capable de réagir très vite (environ  $100ns$ ) aux variations de luminosité. Comme nous ne disposions pas d'une carte d'acquisition numérique, et qu'un calcul rapide montre qu'avec des bandes espacées d'un centimètre la fréquence signal attendu est au maximum de l'ordre de la dizaine de kilohertz, nous avons décidé d'échantillonner le signal en passant par la carte son d'un ordinateur. En effet une telle carte, même si elle est prévue pour échantillonner du son, se comporte comme un simple convertisseur analogique numérique précédé d'un filtre passe-haut, et en ramenant le signal étudié dans une gamme raisonnable de tension à l'aide d'un système d'amplification adéquat, on peut s'en servir comme d'un oscilloscope numérique. Ce système présente même l'avantage supplémentaire de permettre l'utilisation de tous les outils logiciels de traitement du signal, dont nous avons fait une grande consommation. Voici deux photographies du montage final :

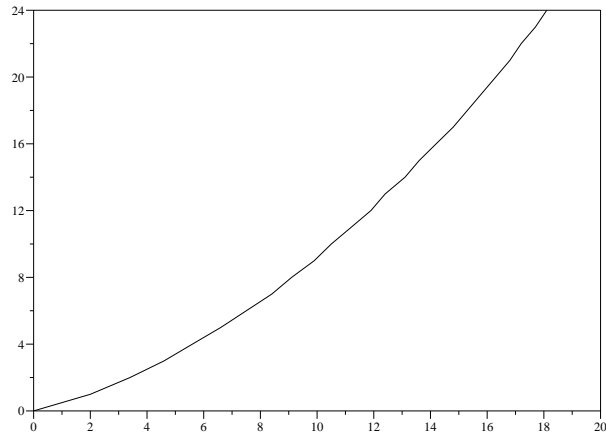


on distingue la mire blanche et noire sur la fusée, les ampoules pour l'éclairage (les mesures se font par réflexion), un tube pour "focaliser" le signal lumineux (la photodiode se trouve au fond du tube) et les câbles de mesure et d'alimentation.

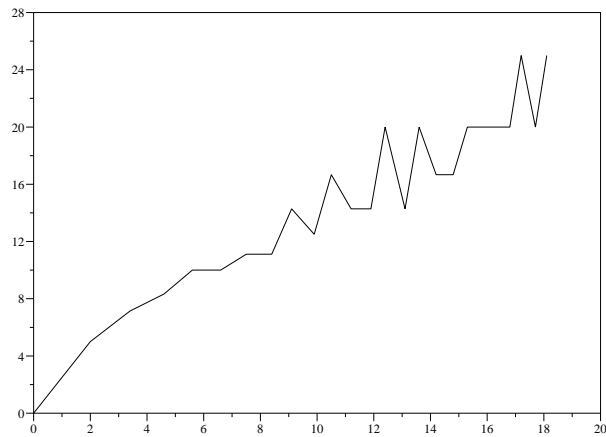
Pour commencer, on réalise des tirs de fusée (sans eau vu les circonstances, puisqu'on réalise cette première expérience en intérieur, et en l'arrêtant dès la sortie du launchtube avec un oreiller) à différentes pressions et on enregistre sur l'ordinateur les signaux obtenus. Par exemple, pour un tir à trois bars avec une fusée de 65 grammes, nous avons obtenu le signal suivant :



On distingue très clairement l'accélération de la fusée qui se traduit par une diminution de la pseudo-période du signal au cours du temps. On voit aussi qu'au lieu des créneaux que l'on devrait idéalement obtenir, on a plutôt une forme de sinusoïde. On peut augmenter la résolution du capteur en augmentant la longueur du tube, mais la luminosité baisse alors et le signal est difficile à distinguer du bruit (50 Hz du secteur capté par nos fils non blindés, parasites en tout genres, etc). De plus il est facile d'observer que la carte son possède manifestement à l'entrée un filtre passe-haut qui bloque la composante continue du signal et les basses fréquences. Le signal obtenu est donc légèrement modifié, mais il reste tout à fait exploitable. On peut tracer la courbe de position en fonction du temps (les unités sont cm / ms) :

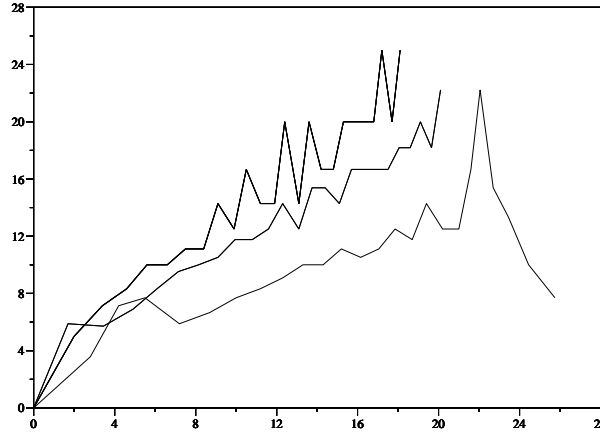


... puis en calculant la dérivée discrète on a la vitesse en fonction du temps (en m/s et en ms respectivement) :



La courbe de vitesse présente des irrégularités sur la fin, certainement dues aux incertitudes expérimentales (précision des mesures), mais on devine la forme de la courbe qui interpole les points expérimentaux. Ici la vitesse de sortie du launchtube est de l'ordre de  $20-25 \text{ m s}^{-1}$ .

On peut même comparer les courbes de vitesse avec différentes valeurs de la pression initiale (ici 2, 2.5 et 3 bars) :



On voit que les courbes de vitesse sont assez douteuses, surtout sur la fin, mais on a au moins l'allure de la courbe et les ordres de grandeurs. Les pistes à explorer pour améliorer cette expérience sont :

- augmenter la résolution en augmentant la longueur du tube, voire en focalisant le signal lumineux à l'aide d'une lentille.
- travailler dans le noir pour augmenter le rapport signal / bruit, mais dans ce cas il faudrait disposer d'une meilleure source de lumière que nos deux ampoules sur pile 4,5V ! (lors de nos premiers essais, nous travaillions le soir en présence d'une lumière artificielle et les ampoules alimentées en 50Hz nous donnaient des parasites en forme de sinusoïde à cette fréquence, mais nous avons résolu ce problème en travaillant ensuite en lumière naturelle et en alimentant nos sources avec du courant continu).
- affiner les bandes blanches et noires sur la fusée.

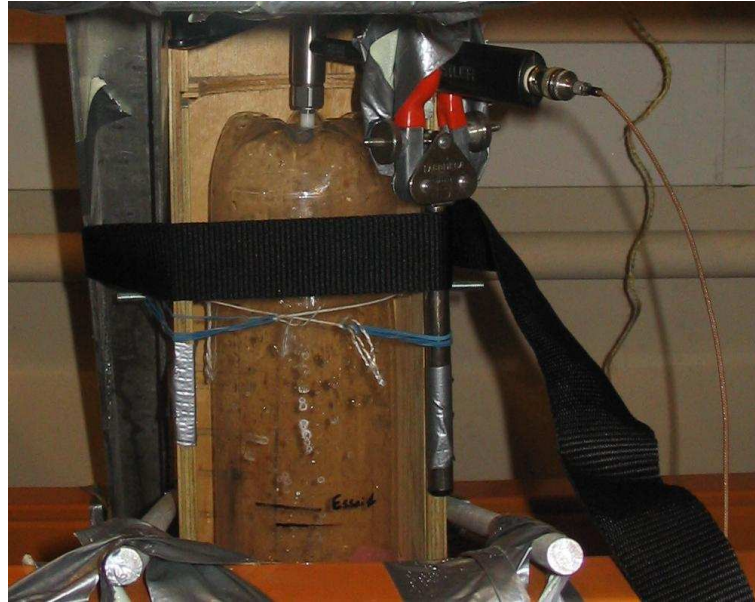
Même s'il est donc possible d'améliorer ce protocole expérimental, cette manipulation fut quand même un beau succès. Ses résultats pourront être confrontés aux prévisions du modèle.

## 4.2 Poussée de l'eau

### 4.2.1 Description de l'expérience

Pour cette expérience, nous avons fixé une bouteille de plastique de 2 litres sur un banc d'essais, goulot en bas, de sorte qu'elle puisse coulisser verticalement et appuyer sur un capteur de force situé au-dessus d'elle (voir la photographie du dispositif). L'expérience était filmée par une caméra rapide réglée à 260

images par seconde, ce qui a permis d'évaluer le débit d'eau et de vérifier expérimentalement que l'interface reste "relativement horizontale", conformément aux hypothèses retenues pour la modélisation.



#### 4.2.2 Résultats

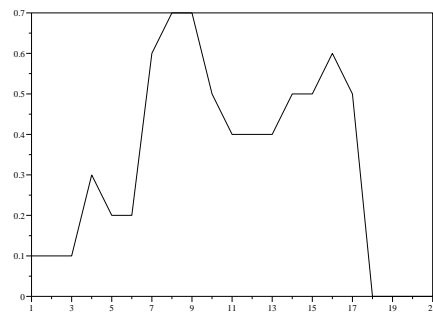
Une première constatation expérimentale est que l'interface air / eau reste relativement horizontale, sauf dans la zone de la tuyère où elle prend une forme bombée. On l'observe sur la série de photographies suivante, où les prises de vue sont espacées de  $1/52$  de seconde.



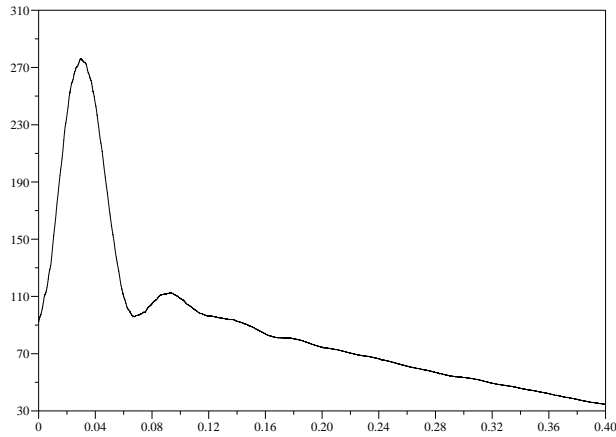
Les repères marqués tous les centimètres le long de la bouteille permettent aussi d'évaluer le débit d'eau. En première approximation, et pour avoir des ordres de grandeur, on constate que la bouteille remplie d'un litre d'eau avec

une pression d'air de trois bars, se vide en 18 images - soit 70 millisecondes. Le débit correspondant à travers la tuyère est donc 15 litres par seconde, à une vitesse de 17 mètres par seconde. Cette quantité de mouvement éjectée en 7/100 de seconde correspond à une force de l'ordre de 250 newtons, l'équivalent d'un poids de 25 kg. Ceci donne, simplement à l'aide du film, l'ordre de grandeur des valeurs étudiées.

On peut même essayer de relever la hauteur d'eau dans la bouteille en fonction du temps pour connaître le débit et en déduire la force de poussée. Malheureusement l'échelle peu précise (en centimètres) sur le bord de la bouteille, et la déformation de l'interface, en plus du fait que la bouteille n'est pas cylindrique dans la région du goulot, etc... rendent cette démarche difficile. On obtient trop peu de points, une grande imprécision et une courbe de débit inexploitable de la forme :

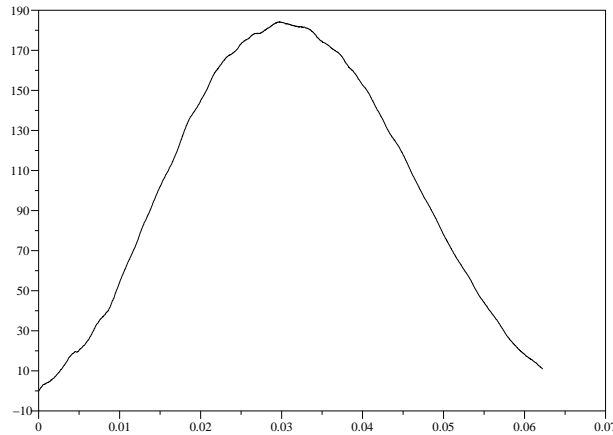


Néanmoins, en recommençant cette expérience avec plus de précision il serait certainement possible d'obtenir une "bonne" courbe. Voyons maintenant les courbes de poussée.



Sur ce graphique, où figure la force exercée sur le capteur en ordonnées (en newtons) et le temps en abscisses (en secondes), on observe une phase de croissance suivie d'une décroissance "symétrique", sur une durée de l'ordre de 6/100 de seconde (qui correspond à la vidéo). Le pic de force atteint 270 newtons, ce qui correspond à l'ordre de grandeur précédemment établi ci-dessus. Le deuxième pic de poussée pourrait correspondre à la phase de poussée de l'air.

Ensuite la courbe entame une décroissance régulière modulée par des oscillations d'amplitude décroissante. Compte tenu du temps de poussée indiqué par la vidéo et de la forme surprenante de la courbe, ce signal n'est pas retenu comme pertinent. Les oscillations décroissantes proviennent sans doute des mouvements amortis de la masse interne du capteur, et la décroissance régulière jusqu'à zéro ressemble à une dérive du capteur. Comme la force démarre à  $t=0$  de 90 newtons et redescend à cette valeur avant la phase de dérive, on peut supposer que pour être pertinent le graphique doit être translaté de 90 newtons vers le bas. Le nouveau graphique devient :



Cette expérience, réalisée avec du matériel de pointe, nous a demandé une bonne dose d'esprit pratique (une partie du matériel pour la fixation du banc d'essais avait été récupéré dans la benne à ordures du SIE!) et d'efficacité puisque nous ne pouvions pas mobiliser très longtemps le matériel et les locaux du LadHyx. Elle nous a donné de précieuses informations sur la phase d'éjection de l'eau, ce qui n'avait pas été fait, à notre connaissance, jusqu'à présent.

### 4.3 Frottement fluide de l'air

Un phénomène crucial pour le déroulement du vol est la force de frottement fluide exercée par l'air sur la fusée lors de la phase de montée. En effet, la masse de la fusée est très faible dès la fin de l'éjection de l'eau, qui intervient après seulement quelques mètres de montée, et l'énergie cinétique de la fusée est largement dissipée par frottement fluide. Nous avons donc tenté de mesurer précisément ce phénomène afin de le modéliser au mieux.

#### 4.3.1 Dispositif expérimental

L'objectif est de mesurer, avec le profil de la fusée, la force de frottement en fonction de la vitesse, et ce, pour une gamme de vitesse caractéristique du vol de la fusée : de l'ordre de  $100\text{km/h}$

#### 4.3.2 Problèmes expérimentaux

L'étude en soufflerie n'étant pas à notre portée, la première idée qui nous est venue à l'esprit était de mesurer des temps de chute depuis des bâtiments en hauteur. Nous esperions, en faisant varier des paramètres comme la masse de la fusée ou la hauteur du lâché retrouver la relation entre force de frottement fluide et vitesse. Cependant, cette approche pose 2 problèmes expérimentaux :

**Gamme de vitesse** Le cas de la chute libre (correspondant à une fusée de masse infinie) est une borne supérieure des vitesses que nous pouvons atteindre. De plus, la hauteur des bâtiments auxquels nous avons accès facilement n'excédait pas 15 mètres. On constate alors aisément que la vitesse la plus élevée que l'on peut atteindre est de :

$$v_{max} = \sqrt{2gh} \approx 17m.s^{-1} (= 62km/h)$$

De plus, la fusée ne reste pas longtemps à haute vitesse, on n'aura donc que peu d'information sur la force de frottement à fort nombre de Reynolds.

**Imprécision de la mesure** Le temps de chute est de l'ordre du temps de chute pour la chute libre :

$$t_{chutelibre} = \sqrt{2h/g} \approx 1,75s$$

Or, lors des essais que nous avons réalisés, nous avons constaté que l'incertitude due au temps de déclenchement du chronomètre était d'environ 0,15s. De plus, nous n'avions pas de bâtiment avec une façade en devers, et le vent (même très faible) avait tendance à rabattre la fusée contre la paroi.

Nous avons donc décidé pour toutes ces raisons de mesurer la force de frottement fluide d'une façon indirecte. Notons que la vitesse élevée ( $\approx 100km.s^{-1}$ ) est en réalité le point qui pose problème pour cette mesure.

### 4.3.3 Transposition du problème

**Analyse dimensionnelle** Soit  $F$  la force de trainée exercée sur la bouteille qu'on modélisera en première approximation comme un cylindre de diamètre  $D$ . A priori  $F$  dépend de  $D$ , de la vitesse de la bouteille  $U$ , et de la viscosité  $\mu$  et de la masse volumique  $\rho$  du fluide considéré. La matrice des exposants aux dimensions s'écrit.

	$F$	$D$	$U$	$\mu$	$\rho$
$L$	0	1	1	-1	-3
$M$	1	0	0	1	1
$T$	-2	0	-1	-1	0
$\Theta$	0	0	0	0	0

Le rang de cette matrice étant 3, il existe donc deux paramètres adimensionnels :  $\pi = \frac{F}{\rho U^2 D}$  et  $\pi_1 = \frac{\rho U D}{\mu} = Re$ . D'après le théorème de Vaschy-Buckingham on a donc

$$\frac{F}{\rho U^2 D} = \Phi(Re)$$

On voit alors bien que le seul paramètre ayant une influence sur le  $C_x$  est le nombre de Reynolds ( $Re$ ).

$$C_x = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho v^2 d} = \Psi(Re)$$

On trouve, dans l'air, pour une vitesse de  $100\text{km/h}$  et une longueur caractéristique de  $10\text{cm}$  :

$$Re = 1,78 \cdot 10^5$$

De nombreuses expériences de mécaniciens des fluides ont montré que le  $C_x$  était constant pour un nombre de Reynolds compris entre  $10^4$  et  $3 \cdot 10^5$  ce qui couvre la gamme de vitesse de la fusée. Le  $C_x$  peut être considéré comme constant pendant la phase de vol qui nous intéresse (après la poussée la fusée ne dépasse jamais les  $200\text{km/h}$  qui nous feraient passer dans un régime instationnaire).

**Transposition du problème** La nature du fluide n'intervenant donc qu'à travers le nombre de Reynolds : on peut faire l'expérience de mesure du  $C_x$  dans l'eau en notant que dans l'eau, avec la même fusée, le nombre de Reynolds a la valeur indiquée plus haut pour une vitesse  $v_e$  :

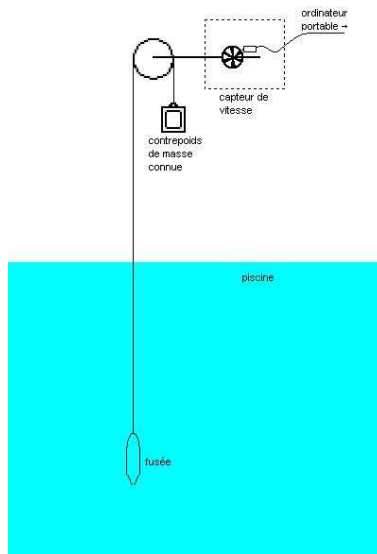
$$v_e = 5,49\text{km/h}$$

On peut donc réaliser des mesures à vitesse beaucoup plus faible dans l'eau.

#### 4.3.4 Expérience

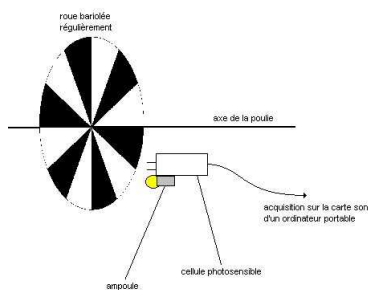
**Idée de la manipulation** Pour obtenir la relation entre vitesse et force de frottement, le plus simple semble de tirer à force constante sur la fusée et d'attendre que la vitesse limite soit atteinte. Si on connaît ces 2 dernières grandeurs (force et vitesse limite) pour différentes valeurs de la force, l'objectif est rempli. Nous avons donc réalisé une manipulation qui met en oeuvre cette idée.

**Schémas de principe** Le principe est simple : une fusée qui repose initialement au fond de la piscine est tirée vers le haut par un fil qui passe par une poulie, et qui est attaché par l'autre extrémité à un contrepoids qui descend au fur et à mesure que la fusée monte. Un capteur mesure la vitesse angulaire au niveau de la poulie, dont on déduit la vitesse de la fusée.



Le capteur de vitesse angulaire est très proche de celui utilisé pour mesurer la vitesse de la fusée lors de la phase de poussée sur le launch tube : on mesure grâce au photocapteur la vitesse angulaire de la poulie de rayon  $r$  connu. On en déduit ainsi la vitesse de la fusée  $v$  :

$$v = \omega r$$



#### 4.3.5 Analyse des Résultats

**Etude théorique** Dans les expériences cherchant à déterminer le coefficient de frottement de la fusée, le poids de la bouteille a été choisi (en faisant varier la quantité d'eau) tel que la poussée d'Archimède compense parfaitement le poids. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la bouteille donne donc comme équation différentielle du mouvement :

$$m_b \frac{d^2 z}{dt^2} = -f \frac{dz}{dt} + m_p g$$

où  $m_b$  et  $m_p$  représentent respectivement la masse de la bouteille et celle du contrepoids,  $z$  l'altitude de la bouteille et  $f$  le coefficient de frottement. Pour mémoire rappelons que  $f = 1/2\rho D C_x$

La résolution de cette équation donne :

$$z(t) = \frac{m_b \log(\cosh(\frac{\sqrt{f}\sqrt{g}\sqrt{m_p}}{m_b} t + \sqrt{f}\sqrt{g}\sqrt{m_p} C_1))}{f} + C_2$$

Les conditions  $z(0) = 0$  et  $\frac{dz}{dt}(0) = 0$  permettent de trouver la valeur des constantes  $C_1$  et  $C_2$  :

$$C_2 = -\frac{m_b \log(\cosh(\sqrt{f}\sqrt{g}\sqrt{m_p} C_1))}{f}$$

puis

$$C_1 = 0$$

et donc

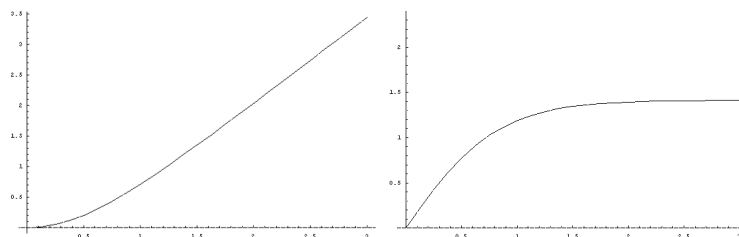
$$C_2 = 0$$

donc

$$z(t) = \frac{m_b \log(\cosh(\frac{\sqrt{f}\sqrt{g}\sqrt{m_p}}{m_b} t))}{f}$$

et

$$v(t) = \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{g}\sqrt{m_p} \tanh(\frac{\sqrt{f}\sqrt{g}\sqrt{m_p}}{m_b} t)}{\sqrt{f}}$$



Hauteur  $z(t)$  et vitesse  $v(t)$   
 Courbes obtenues pour  $m_p=0.265\text{kg}$ ,  $m_b=1.5\text{kg}$  et  $f=1.3$

On retrouve bien la valeur  $v_\infty$  qu'on obtient en écrivant l'équilibre des forces à l'infini :

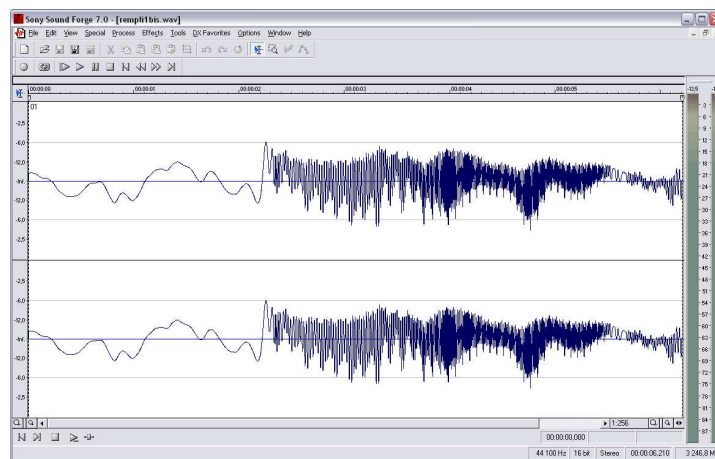
$$\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \frac{\sqrt{g}\sqrt{m_p}}{\sqrt{f}}$$

Grâce à ce résultat on peut déterminer expérimentalement la valeur de  $f$  en cherchant la valeur de  $v$  lorsque  $v$  devient constant, c'est à dire après 3-4 secondes.

#### 4.3.6 Résultats expérimentaux

**Données numériques** Les expériences ont été menées à la piscine de l'X, avec cinq valeurs différentes pour les contrepoids : 150g, 195g, 265g, 340g et 525g avec une erreur possible de  $\pm 10g$  et une fusée de masse constante 1,5kg  $\pm 10g$ .

**Méthode d'acquisition** Grâce au dispositif vu précédemment, les courbes ont été enregistrées dans des fichiers sons .wav comme celui de la figure suivante.



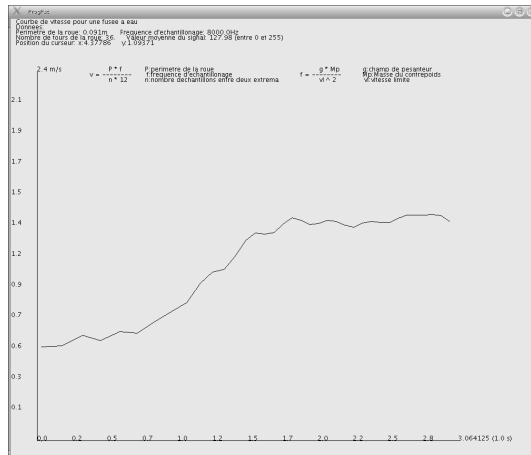
Courbe donnée par l'acquisition

Il a bien sûr fallu traiter ce signal pour avoir une courbe beaucoup plus propre et exploitable. Nous avons converti au format 8000 Hz largement suffisant pour le signal qui nous intéresse ( $\approx 150$  Hz), appliqué un filtre passe-bas pour éliminer une modulation basse fréquence sûrement due à des parasites, puis amplifié le signal pour rendre les passages par zéro facilement reconnaissables.



déterminer graphiquement la valeur limite de la vitesse, avec une imprécision de l'ordre de  $0,1\text{m/s}$ .

### Résultats expérimentaux



Résultats du programme

Les résultats que l'on observe grâce au programme sont de la forme de la figure ci-dessus. Celle-ci correspond par exemple à l'expérience numéro trois et la courbe théorique correspondante est celle de la figure "z(t) théorique" de la section précédente (où on a choisi  $f = 1.3$  pour avoir la même vitesse limite). On voit bien ainsi que la courbe expérimentale est de la forme attendue et on peut lire  $v_\infty$  graphiquement avec une bonne précision. Les différentes valeurs obtenues sont résumées dans ce tableau :

Expérience	$m_p$	$v_\infty$	$f$	$\Delta f$
1	525g	2.10m/s	1.17	0.13
2	360g	1.47m/s	1.63	0.27
3	265g	1.42m/s	1.29	0.23
4	195g	1.01m/s	1.88	0.47
5	150g	0.97m/s	1.56	0.43

On note une grande incertitude sur  $f$ , à faible vitesse, car :

$$\begin{aligned} \Delta f &= \left| \frac{\partial f}{\partial m_p} \right| \Delta m_p + \left| \frac{\partial f}{\partial v_\infty} \right| \Delta v_\infty \\ &= \frac{g}{v_\infty^2} \Delta m_p + 2g \frac{m_p}{v_\infty^3} \Delta v_\infty \end{aligned}$$

donc croît comme  $\frac{1}{v_\infty^3}$ . Les résultats les plus pertinents sont donc a priori ceux des trois premières expériences et  $f = 1.2 \pm 0.2$ .

On peut alors en déduire le coefficient de trainée  $C_x$  par :

$$C_x = \frac{f}{\frac{1}{2} \rho D}$$

On obtient numériquement  $C_x = 0.41 \pm 0.06$  valeur qui est remarquablement conforme avec ce qu'on peut trouver dans la littérature.

#### 4.4 Mesure d'altitude à volume d'eau constant et pression variable

##### 4.4.1 Méthode 1 : A l'aide d'une caméra

Pour pouvoir mesurer l'altitude de la fusée nous avons tout d'abord pensé à utiliser une caméra pour filmer le vol. Nous avons donc réalisé l'expérience dans un grand champ. La fusée utilisée était constituée d'une bouteille à laquelle on a collé des ailerons ainsi qu'une demi bouteille faisant office de tête avec une masse additionnelle en métal de 80 grammes.



L'expérience consistait à mesurer l'altitude de la fusée en utilisant au départ toujours la même quantité d'eau, mais en faisant varier la pression. Nous avons effectué plusieurs manipulations, mais nous avons assez vite constaté que la méthode de la caméra n'était pas exploitable. Concrètement, si nous étions trop près, la fusée sortait du cadre de la caméra, ce qui rendait impossible la mesure d'altitude. En revanche si l'on s'éloignait trop nous n'arrivions plus à distinguer la fusée sur l'image de la caméra. Ce premier échec nous a donc poussé à réviser notre protocole expérimental.

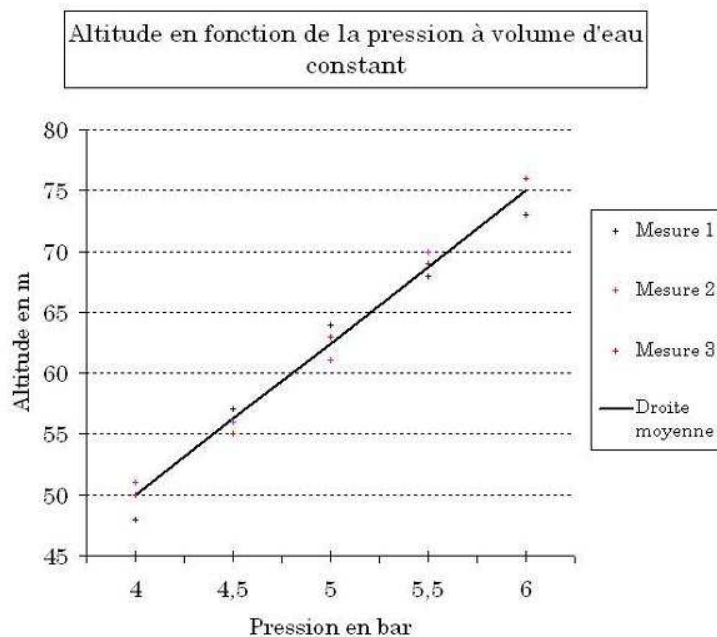


#### 4.4.2 Méthode 2 : utilisation d'un fil de pêche

Pour avoir une mesure assez précise (de l'ordre du mètre) nous avons décidé d'accrocher un fil de pêche au goulot de la bouteille. Le fil était enroulé autour d'une bobine et se déroulait au fur et à mesure que la fusée prenait de l'altitude. Nous avons fait l'hypothèse que le fil ne perturbait pas la dynamique de la fusée, hypothèse rendue vraisemblable par la légèreté du fil de pêche et la masse additionnelle importante de la fusée dans cette expérience qui lui donne une plus grande inertie. Les différentes altitudes étant supérieures à 40 mètres, nous nous sommes rendues sur le stade d'honneur afin d'utiliser la piste du 100 mètres (et surtout les graduations tous les 10 mètres) pour pouvoir mesurer la longueur du fil. Nous avons donc effectué plusieurs mesures en essayant d'utiliser la même quantité d'eau à chaque essai. Ces essais furent au nombre de 15, avec les pressions suivantes : 4, 4.5, 5 et 5.5 et 6 bars. Une pompe avec manomètre intégré nous a permis de contrôler la pression à l'intérieur de la fusée. Nous avons obtenu les résultats suivants, avec pour chaque pression trois mesures :

Pression	4	4.5	5	5.5	6
Mesure 1	48	57	64	68	73
Mesure 2	51	56	61	70	76
Mesure 3	50	55	63	69	76
Valeur moyenne	50	56,25	62,5	68,75	75

Nous avons ensuite effectué une analyse graphique avec la courbe d'altitude pression suivante :



On obtient ainsi une réponse linéaire pour la fonction altitude par rapport à la pression. L'alignement quasi-parfait des points sur une droite est même trop beau pour être vrai, et il ne correspond pas au comportement prévu par notre modèle, selon lequel la courbe devrait rapidement s'aplatir aux fortes pressions !

Pour finir cette section, citons à titre humoristique toutes nos autres (bonnes !) idées de manipulations que nous avons abandonnées pour une raison ou pour une autre :

- embarquer un altimètre électronique dans la fusée avec un capteur de pression. D'abord, de nombreuses personnes consultées nous ont affirmé que l'on ne mesurerait pas l'altitude mais en gros une fonction de l'altitude et de la vitesse, comme dans le tube de Pitot, en raison de la première loi de Bernoulli et de la distinction entre pression statique et pression dynamique. Néanmoins nous avons tenté de construire un tel altimètre "pour voir", mais en raison de problèmes de communication entre le microcontrôleur (un PIC 16F675) chargé de l'échantillonnage et le capteur de pression, le tout est encore à l'état de plaque Lab pleine de câbles.

- pour mesurer le Cx de la fusée, nous voulions la placer au bout d'un manche à balai muni d'un capteur de force, le tout placé devant une voiture en mouvement sur la circulaire de l'Ecole. On aurait ainsi pu mesurer la force exercée sur la fusée en fonction de la vitesse au compteur. Malheureusement, le capteur (un marteau de force du LadHyx) n'est pas embarquable.

- toujours dans l'idée d'obtenir expérimentalement l'altitude de la fusée pendant toute la durée du vol, nous avons essayé de réaliser un "radar à ondes sonores" (un sonar, en fait). Avec un tweeter piézoélectrique réglé sur une fréquence assez élevée (20 kHz), on peut effectivement capter un certain écho même à grande distance (la fusée étant normalement située dans le ciel, il n'y a pas de problèmes d'échos multiples, ce qui simplifie les choses). Mais le traitement du signal nécessaire était vraiment hors de notre portée.

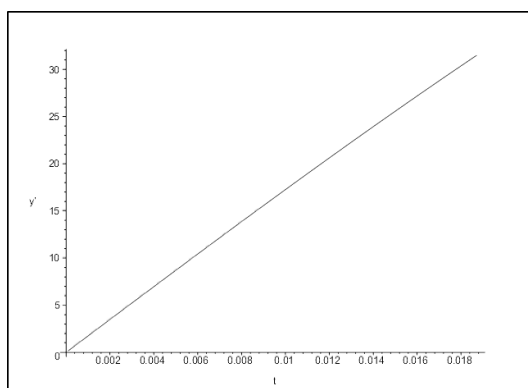
- et on en oublie sûrement !

## 5 Validation du modèle

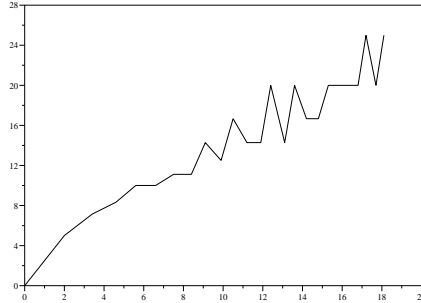
### 5.1 Poussée sur le launchtube

La précision de l'expérience permet de faire une comparaison poussée avec ce que prédit la théorie.

Dans le cas d'une bouteille non remplie (poids approximatif 65g) mise sous pression à 3 bars on obtient la courbe de vitesse théorique suivante.



à comparer avec la courbe expérimentale obtenue précédemment.



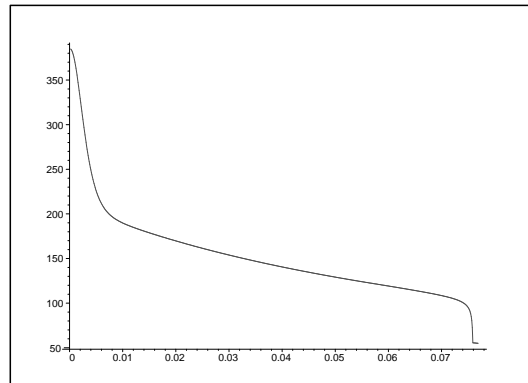
On voit immédiatement que le modèle colle très bien à l'expérience :

- le temps d'éjection est dans les deux cas de  $18\text{ ms}$
- la vitesse de la fusées à eau à la fin de la poussée du launchtube est d'après l'expérience de  $28\text{ m.s}^{-1}$ , le modèle prédit une vitesse de  $31\text{ m.s}^{-1}$

Malgré une concavité légèrement plus marquée sur la courbe expérimentale, les résultats de cette première expérience sont totalement en accord avec le modèle théorique présenté. Mais vu la relative facilité des équations introduites dans ce modèle c'est plutôt une validation de la méthode expérimentale utilisée qu'une véritable validation du modèle.

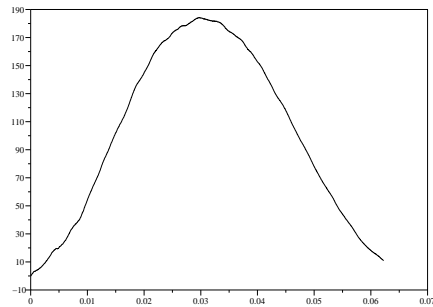
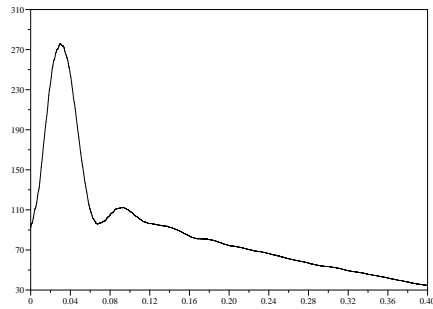
## 5.2 Poussée de l'eau

Comme nous n'avons pas pu faire de mesure expérimentale sur la fusée en vol pour cette phase, nous devons nous fier à l'étude sur banc d'essais. La théorie prévoit pour cette expérience que la force exercée par le corps de la fusée sur le marteau est :



La courbe expérimentale correspondante, dont nous avons déjà critiqué la partie "oscillante" et décroissante après le premier pic, est (données brutes et

données retenues comme pertinentes a priori) :



On constate qu'en réalité, la courbe "brute" correspond plus au profil théorique (aux oscillations de la masse interne du capteur près), sauf au début : la force mesurée croît d'abord rapidement alors que cette phase de croissance est absente du modèle théorique. Il est possible que le capteur n'ait pas réagi instantanément à la sollicitation, ou que l'ouverture de la tuyère (une étape difficile et cruciale de la manipulation) n'ait pas été réalisée de façon assez rapide. Il est aussi très probable que la bouteille ne se comporte pas du tout comme un corps rigide (ce n'est que du PET fin!). Au début de l'expérience du marteau de choc, la bouteille absorberait le "choc" initial en se déformant, ce qui expliquerait que la force exercée sur le capteur soit moindre. Dans ce cas, c'est tout le protocole expérimental qui doit être remis en cause!

En postulant que la courbe devient "valable" à partir du moment où la bouteille est la plus déformée, c'est à dire le moment où la poussée commence logiquement à décroître, on aurait cependant une bonne correspondance entre la valeur expérimentale de 180 N et la valeur théorique de 160 N au même instant. La décroissance trop rapide pourrait être également expliquée par des problèmes d'élasticité de la bouteille ou de la non perfection du contact bouteille-marteau.

### 5.3 Poussée de l'air

On peut de même interpréter le deuxième pic de poussée en émettant les mêmes réserves sur les résultats de l'expérience.

On a théoriquement, dans les mêmes conditions que l'expérience, un temps de poussée de l'air de 20 ms ce qui est à peu près conforme aux résultats de l'expérience (le deuxième pic dure plutôt 30-35 ms mais compte tenu des incertitudes liées à la mesure on ne peut pas en dire grand chose).

La théorie prévoit une force comprise de l'ordre de 30 N ce qui correspond à la valeur trouvée expérimentalement au niveau du pic.

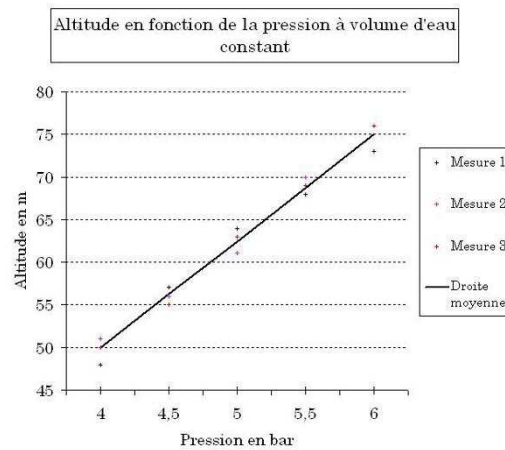
Comme pour la phase de la poussée de l'eau, les résultats expérimentaux ne sont pas suffisamment précis pour pouvoir totalement confirmer le modèle théorique. Néanmoins ils sont suffisamment proches des prédictions pour ne pas l'invalider.

### 5.4 Vol libre jusqu'à l'apogée

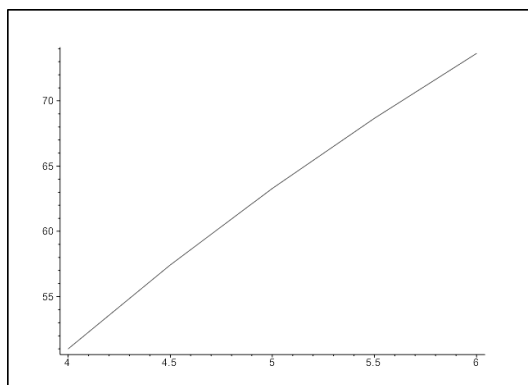
Pour cette phase très simple nous n'avons pas d'expérience à comparer au modèle, mais il ne s'agit pas d'une phase critique au sens où la fusée est soumise uniquement à son poids et au frottement fluide de l'air, deux forces a priori très bien modélisées mise à part une petite incertitude sur la valeur du  $C_x$ .

### 5.5 Vol global

On peut finalement comparer les valeurs de l'altitude obtenues par l'expérience du fil de pêche à pression variable, tous autres paramètres fixés, avec la hauteur de vol prévue par le modèle en mettant bout à bout les prédictions pour chacune des quatre phases de la montée.



Expérience



Théorie

Un aspect satisfaisant est que dans le domaine étudié (4 à 6 bars, par pas de 0.5 bar) la courbe attendue est bien quasi-linéaire (simplement pour un problème d'échelle, dans la gamme de pression couverte la courbe est proche de son approximation au premier ordre).

Le modèle est vraiment très proche de l'expérience (l'erreur relative reste inférieure à 3 %). Cette expérience bien qu'imprécise valide à la fois le modèle et la valeur du  $C_x$  retenu (on a pris dans la simulation  $C_x = 0.43$ ).

## 5.6 Conclusion

On obtient finalement un modèle assez proche des résultats expérimentaux, ce qui est plutôt satisfaisant. Même s'il est difficile de faire une validation précise de chaque phase du modèle compte tenu des incertitudes observées lors de chaque expérience on peut affirmer qu'en première approximation le modèle standard des fusées à eau est tout à fait valable.

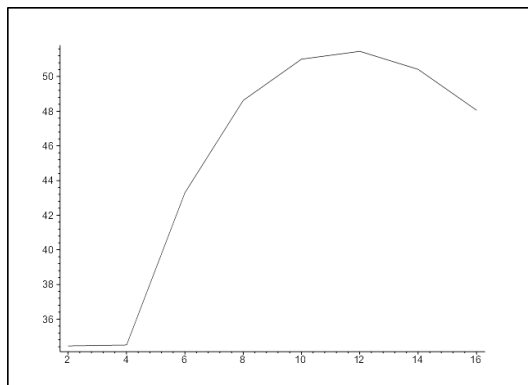
## 6 Approfondissements

On peut se poser d'autres questions relatives aux fusées à eau. Celles qui nous sont venues à l'esprit, mais qui n'entraient pas dans le cadre de notre objectif (la validation expérimentale du modèle) sont regroupées ici. Nous les donnons à titre d'"ouverture" sachant que, ayant déjà beaucoup de travail avec nos objectifs principaux, nous ne nous sommes pas concentrés sur ces problèmes annexes...

### 6.1 Recherche du volume d'eau optimal

Un problème délicat est la recherche du volume d'eau initial optimal. En effet avec trop peu d'eau, la bouteille n'aura pas suffisamment de masse à expulser, la poussée sera moindre et à contrario si le volume d'eau initial est trop grand,

le volume de gaz et donc l'énergie contenue dans la bouteille en pâtira. On voit bien ce double phénomène sur la courbe suivante obtenue à l'aide du modèle théorique.



En pratique ce problème d'optimisation joue un rôle primordial car la courbe est sensiblement concave autour de son maximum et une erreur de 1cm sur la hauteur d'eau lors du remplissage initial fait perdre plusieurs mètres à l'apogée de la fusée. Une expérience de mesure de l'apogée en fonction de la hauteur d'eau à pression constante a été réalisée par M. Prusa (disponible sur <http://epubs.siam.org/sam-bin/dbq/article/34822>) et l'accord théorie / expérience est remarquable.

## 6.2 Forme de la tuyère

Le goulot des bouteilles de soda sont légèrement convergents dans leur partie finale (à l'intérieur du goulot). Selon M. Hémon que nous avons rencontré au LadHyx, un divergent de  $4^\circ$  à  $7^\circ$  serait préférable (valeurs effectivement utilisées dans les vraies fusées). Mais cette modification est difficile à réaliser (on ne peut pas visser de divergent au goulot car ce n'est pas compatible avec le mécanisme de déclenchement). De plus il faudrait certainement un appareillage de mesure très sensible pour voir la différence avec la tuyère originale !

Dans le même genre d'idées, on peut se demander si le choix du modèle de bouteille en plastique influe sur la "qualité" de l'éjection de l'eau. La région de transition entre le corps cylindrique de la bouteille et le goulot proprement dit, est beaucoup plus effilée sur une bouteille de Quézac que sur une bouteille de Coca-Cola, par exemple, comme on le voit sur la photographie suivante :



Là encore il faudrait disposer d'un appareillage sensible pour mesurer l'effet de cette correction. Notons que de toute façon les bouteilles effilées de type Badoit ou Quézac ne sont pas utilisées en pratique car elles possèdent un volume intérieur insuffisant (souvent 1 litre).

Toutes les autres parties de la bouteille pourraient d'ailleurs faire l'objet d'une même optimisation de forme (la tête aérodynamique, les ailerons...).

### 6.3 Stabilité

Une autre possibilité certainement très intéressante serait l'étude de la stabilité de la fusée. En effet la pratique nous incite d'une part à augmenter la taille des ailerons pour gagner en stabilité, mais à la diminuer pour réduire la résistance de l'air (frottement fluide) dont l'effet est très sensible pour les fusées équipées de grands ailerons. Leur nombre n'est pas évident non plus : une fusée à deux ailerons est instable, trois ailerons est la solution unanimement adoptée en pratique, mais est-ce la meilleure ? Enfin la répartition des masses dans la fusée (qui ne joue aucun rôle dans notre étude, seule importe la valeur des masses) est prépondérante car plus le centre de gravité est à l'avant, plus la fusée est stable. Ainsi on peut diminuer la taille des ailerons et gagner sur la résistance de l'air simplement en optimisant la répartition des masses à l'intérieur du corps de la fusée. Ceci intervient surtout dans les modèles plus compliqués équipés d'un parachute voire d'un deuxième étage avec altimètre, appareil photo...

### 6.4 Efforts sur la bouteille

Le problème de mise sous pression d'un réservoir cylindrique est classique en mécanique, mais ici la forme de la bouteille est un peu plus délicate, avec son goulot et son assise de forme compliquée. Pour la sécurité des utilisateurs et pour la satisfaction intellectuelle on pourrait s'intéresser à ce problème et au moment où intervient la rupture. Ceci permettrait en plus d'évaluer la quantité

d'énergie stockée dans le corps de la fusée (énergie élastique de déformation) dont nous parlions plus haut et qui a été négligée.

On sait en pratique que la rupture intervient aux environs de 10 bars pour la plupart des bouteilles, et que la rupture s'effectue soit par percement du réservoir, soit par cassure au niveau du goulot qui semble être soumis à d'intenses efforts comme on le voit sur cette photographie d'une bouteille ayant cassé sur la base de lancement :



### 6.5 Et pour améliorer (encore) l'efficacité...

Des expériences sont envisageables pour évaluer l'effet des paramètres autres que la pression, la masse de la fusée et la hauteur d'eau initiale. Pour l'effet de la masse volumique de l'eau, on peut essayer de la remplacer par de l'eau saturée en sel. Dans le même genre d'idée on peut remplacer l'eau par du  $CO_2$  (c'est ce qui est fait par les détenteurs de records d'altitude). Pour se rapprocher de l'idéal du fluide non visqueux, on peut aussi essayer de remplacer de l'eau par de l'eau savonneuse. Mais ces modifications ne doivent apporter que des améliorations légères, et avant d'espérer les quantifier il faudrait disposer d'un appareillage beaucoup plus précis pour la mesure de l'altitude à l'apogée.

Aujourd'hui les meilleures fusées sont des modèles très longs (environ trois mètres) et de section très réduite pour minimiser le frottement fluide. Elles sont réalisées en carbone, plastique (par quel procédé?) ou en aluminium. Elles atteignent plus de 400 mètres à l'apogée.

\*\*\*

Cette étude des fusées à eau nous a donc permis de mettre en pratique sur un phénomène abordable, tant du point de vue théorique qu'expérimental, les connaissances acquises en mécanique des fluides. Nous avons aussi pu mesurer les difficultés que l'on rencontre en pratique dès que l'on veut passer de l'idée

à la réalisation d'une manipulation, et nous nous sommes initiés au travail en groupe. En dépit des difficultés que nous avons rencontrées tant sur le plan scientifique que sur le plan humain, nous garderons certainement tous un excellent souvenir de ce qui fut pour nous une expérience formatrice et très enrichissante.

\*\*\*

## Références

- [1] D. Wheeler, *Modeling the thrust phase*, <http://www.et.byu.edu/wheeler/benchtop/>
- [2] M. Prusa, *Hydrodynamics of a water rocket*, <http://epubs.siam.org/sam-bin/dbq/article/34822>
- [3] P. Huerre, *Mécanique des Fluides, tome 1*, Ed. de l'Ecole Polytechnique
- [4] J.Bouttes, *Mécanique des Fluides*, Ed. Ellispes